BRISER LES BARREAUX DE NOS PRISONS MENTALES Du c.o.f.d aux paradoxes

« Ne conviendrait-il pas de prêter attention à la pensée qui cherche des occasions dialectiques de sortir d'elle-même, de rompre ses propres cadres...? On ne peut alors manquer de conclure qu'une telle pensée est créatrice. » Gaston Bachelard (Le nouvel esprit scientifique)

1. LE C.Q.F.D. EN QUESTION

"Ils ont craint peut-être qu'à cause de sa très grande facilité et de sa simplicité, la mathématique ne perdit sa valeur par la vulgarisation et ils ont préféré, pour se faire admirer, nous présenter à sa place quelques vérités stériles démontrées avec une subtile rigueur logique comme les effets de leur art, plutôt que de nous apprendre leur art lui-même qui aurait complètement tari notre admiration". René Descartes

A l'Ecole, et plus précisément au collège et au lycée, on ne se contente pas de donner les définitions et procédures comme produits-finis. A l'Ecole, on explique et on démontre. Et on démontre même à tel point qu'une bonne démonstration devient l'essentiel, le nec plus ultra du bon cours. D'ailleurs est considéré comme bon élève celui qui se montre capable de restituer, régurgiter, de façon impeccable les démonstrations apprises, ou, dans les exercices, de trouver la bonne démonstration, celle dont on ne peut se dispenser, faute de " rater " son exercice. Car la conception même des exercices est telle que la crainte de ne rien laisser à l'improviste castre tout autre possible que le passage obligé sous les fourches caudines d'une démonstration prévue à l'avance. Est donc exclue toute "hardiesse des tentatives", comme dit Helvétius, qui ajoute combien " la crainte d'avancer une erreur ne doit point nous détourner de la recherche de la vérité ".

C'est pourquoi l'accent mis seulement sur l'appareillage logico-déductif des démonstrations fait l'impasse sur l'activité de recherche comme invention créatrice productrice de sens. Tout comme dans les sciences dites "expérimentales" où l'importance donnée à l'appareillage expérimental masque le fait créateur décisif des hypothèses de départ (cf.: le chapitre Science expérimentale: une mystification anti-scientifique de H. Bassis dans "Reconstruire ses savoirs ", Messidor, 1985).

On est ici au cœur de la problématique centrale de la transmission en mathématique: le C.Q.F.D. comme mystification ! Mystification qui éclate et devient manifeste dès que l'on prend appui sur la genèse réelle des savoirs face à la distorsion opérée en toute bonne conscience et application par l'enseignement, depuis la transposition des savoirs-savants en savoirs-scolaires jusqu'à leur transmission.

D'où une dissociation indispensable à faire entre découverte et démonstration, entre invention et déduction. Dissociation de principe, donc, mais aussi inversion dans la chronologie puisque la démonstration suit toujours historiquement l'invention, et parfois même, avec de nombreux siècles d'écart.

Parce qu'historiquement, prouver, démontrer, a été un moyen, plutôt qu'une fin :

- •Prouver pour chercher à convaincre les autres : "Il est trop de mon intérêt de ne pas me tromper pour qu'on me soupçonne d'énoncer des théorèmes dont je n'aurais pas la démonstration complète". E. Galois.
- •Prouver pour chercher à se convaincre soi-même : "l'ignorance de mes adversaires fut mon meilleur maître, car elle me força à varier sans cesse mes expériences pour les convaincre ou pour réfuter leurs objections. Ce faisant, ma propre conviction s'en trouvait doublée "Galilée (cf "Se construire..."p.32)

Autrement dit, prouver pour produire une évidence nouvelle, changer ses représentations mentales, là où des résistances font barrage. Ce qui restitue à la démonstration une fonction de nécessité, mais dans un contexte de polémique ⁱ avec les autres ou avec soi-même, qui lui donne sens. Mais où est la polémique, dans l'écoute passive d'un cours, très logiquement et rigoureusement présenté ? où rien n'est laissé au hasard ? Où sont évacuées, comme prémisses sous-jacentes, toutes mises en question éventuelles du contenu, jugées comme incartades inadmissibles ou simplement comme incapacité grave à penser, pardon, à "suivre"...!. D'où le jugement sur l'enfant Einstein, traité d'élève "rêveur".

Polémique, car il ne va pas de soi - quand bien même la démonstration est irréprochable - que la conviction soit emportée, aussi bien auprès des autres que de soi-même.

Pensons à Lambert, ayant démontré la cohérence de géométries fondées sur d'autres postulats que celui d'Euclide, et pourtant refusant d'en prendre acte. Citons Kronecker qui, lorsqu'on lui demande ce qu'il pense de la démonstration par Lindeman de la "transcendance" du nombre P (le fait qu'il n'est racine d'aucun polynôme à coefficients entiers), répond que la démonstration est très intéressante mais que P n'existe pas! C'est Kronecker qui traita Cantor, le grand concepteur de la théorie des ensembles, de "corrupteur de la jeunesse".

La démonstration comme garde-fou, certes, érigé par la raison, mais qui ne convainc que celui qui est prêt à être convaincu. Convaincu, y compris comme Cantor à propos de ses propres inventions dont il disait: "je le vois, mais je ne le crois pas ".

Les militants de l'Education Nouvelle le savent bien, quand ils avancent des faits (et même des chiffres) de réussite d'enfants prétendument en échec, incapables et qu'ils constatent les résistances à être entendus, si ce n'est par ceux qui sont déjà prêts à entendre le pari du "Tous Capables"; les autres rejetant ces faits, refusant ces chiffres, ne peuvent à leurs yeux y touver crédit puisque le pari dont ils sont la conséquence visible ne peut à leurs yeux être recevable.

Convaincre, oui, mais à condition qu'en soit déjà amorcé le chemin, que ce soient manifesté questionnement ou perplexité préalables. Alors la preuve devient événement de pensée et fait franchir un seuil: **celui qui fait du possible une certitude** créant un pouvoir nouveau de pensée, rendant opératoire, et réinvestissable, le savoir ainsi conquis. "Hé, maîtresse, ces deux côtés sont parallèles, et si tu veux, je peux te le montrer" dit Arnaud, hélant au passage l'enseignante qui l'avait, quelques jours avant, défié ⁱⁱ Retrouver un contexte de polémique qui donne sens à la démonstration, parce qu'elle met en jeu, par delà elle- même, une certaine position philosophique

sur le monde, une certaine prise de risque avec soi-même, voilà qui est totalement absent de l'enseignement.

Et pourtant, la prudence exige que tout soit dit, et c'est dit : " on admet " trouve-t-on en début de leçon. Précaution oratoire certes indispensable, mais qui empêche, derrière le "on" de débusquer les "je" créateurs (du passé) qui s'y cachent. Admettre ? Mais pourquoi ? à partir de quoi ? On pourrait donc admettre autre chose ? Mais comment admettre qu'on admet si JE n'ai pas accès aux possibles à admettre. Mais voyons, ici il s'agit d'évidence! Vous avez dit évidence ? Quand justement, les plus grands sauts qualitatifs de la création mathématique furent marqués par des ruptures de sens du contenu des évidences. " C'est au moment où un concept change de sens qu'il a le plus de sens " écrit Bachelard. Donc, quand il y a eu conflit, et conflit âpre, vécu comme insupportable, entre les tenants acharnés d'évidences perçues comme incompatiblesⁱⁱⁱ.

Reconnaissons que ce préalable "on admet que..." revêt une forme d'injonction paradoxale quand il se pose en préalable indiscutable d'un discours qui se veut tout entier sous l'égide de la rigueur. Une RIGUEUR érigée en juge suprême, en référence intangible, alors qu'elle-même est objet de conquête permanente, pour surmonter des obstacles toujours historiquement datés. Rigueur par ailleurs toute relative, dépendante des conceptions d'une époque. Ainsi en a-t-il été précisément de la très rigoureuse géométrie euclidienne qui ne permet pas de rendre compte - rigoureusement !- de la réalité des mouvements du cosmos. C'est le courage du NON à l'évidence première qui est à la racine des plus grandes découvertes. Tel le non d'un Galilée à la conception géocentrique de l'univers. "Les intuitions sont très utiles: elles servent à être détruites " écrit Bachelard dans la "Philosophie du non ". Mais un tel non ne procède pas de la rigueur, il en est seulement un nouveau départ, fruit de l'imaginaire et de l'audace de la raison. Conflit fécond permanent entre rigueur et imaginaire ou chaque pôle est indispensable à l'autre pour s'affirner autant que pour s'affirmer dans un champ nouveau de pensée.

Animant auprès de professeurs de mathématique une réflexion sur les problématiques présentées ici, il arriva que l'un d'eux, didacticien connu, me rétorqua qu'il ne fallait pas surestimer les conflits historiques, car ceux qui avançaient des savoirs nouveaux, s'ils n'étaient pas compris, c'est parce qu'ils ne présentaient pas ces savoirs convenablement, qu'ils n'avaient pas les outils formels, rigoureux, pour le faire!

"Les mythes de la certitude parfaite et de la transparence absolue empêchent de comprendre comment les mathématiques se sont effectivement constituées et donc de saisir la signification des structures obtenues iv

C'est pourquoi, une telle centration de l'enseignement sur les procédures de validations d'un contenu allant avec l'occultation (ou l'ignorance) des enjeux pour lesquels de telles procédures prennent sens, ramène strictement cet enseignement à l'apprentissage d'un SAVOIR-FAIRE - quand bien même il s'accompagne de démonstrations - et non pas à la construction conceptuelle d'un savoir.

D'où le bannissement de tout imaginaire et une perversion de la notion de rigueur - confondue avec dogmatisme - ainsi qu'une perversion du " formalisé" confondu avec formel, au sens de " formaliste.

Ce qui fait de l'enseignement mathématique ce "berceau de l'autoritarisme"[...] "qui est le pire ennemi d'une pensée indépendante et critique" Imre LAKATOS

La mathématique: le terme de DISCIPLINE qui lui revient en souligne bien, au coeur même de sa neutralité affichée, sa fonction de normalisation aliénatrice et donc sa fonction de reproduction idéologique de l'ordre établi. Où la docilité fait loi. C'est pourquoi, en définitive, comme l'écrivait Henri BASSIS, à propos de la mise en relation entre l'usage fait par l'expérimentation et par le logico-déductif dans la transmission usuelle: "Dans l'entreprise institutionnalisée de castration de la mathématique en tant qu'activité de recherche de l'imaginaire en quête d'invention créatrice, la place démesurée qui est faite au C.Q.F.D. et, d'une manière générale à l'appareillage logico-déductif joue le même rôle que la perception hypertrophiée de la place de l'appareillage expérimental dans les sciences. La fonction de cette double distorsion est d'intégrer l'instruction socialement nécessaire dans l'ordre d'un cadre mandarinal où la masse des instruits soit exclue de la faculté d'inventer, réservée aux seuls quelques-uns qu'exige la préservation de l'ordre établi"...

2. LES PARADOXES, FERMENTS D'INVENTION

"Les paradoxes ont fait sortir au jour les contradictions inhérentes à la recherche mathématique, que les démonstrations à la fois dissimulent et résolvent"

"Les paradoxes préparent, au sein de la logique, de la démonstration, de la preuve par la déduction, la revanche de la dialectique "Henri.Lefebyre V

Connus depuis près de 2.500 ans, les paradoxes de Zénon mettent en évidence de façon exemplaire les limites même de la logique, ses déficiences en quelque sorte.

On connaît **l'histoire d'Achille et de la tortue**: si la tortue a de l'avance sur Achille, celui-ci ne pourra jamais la rattraper, quelle que soit sa vitesse, car pendant qu'Achille court pour atteindre le point d'où est partie la tortue, celle-ci avance de telle sorte qu'Achille ne pourra jamais annuler cette avance!

Conséquence implacable d'une rigueur qui ouvre sur l'absurde. En même temps, habile argumentation qui dévoile des contradictions grosses de sauts nécessaires à opérer. On est au creux de problèmes opposant l'infini au fini, puisque, pour Zénon, la somme d'un nombre infini d'intervalles (d'espace et de temps) ne saurait être "finie". Il faudra bien plus de 2.000 ans (début du XIXe s.) (quel bond pour Achille...) pour oser décider, avec la notion de " limite", que peuvent être égales entre elles une quantité finie et la somme d'une infinité de termes.

Pour toucher du doigt, à tous les sens du mot, une telle problématique, découpons dans une feuille ordinaire, un carré dont nous supposerons, par commodité, que son côté a pour mesure 1 (a), ce qui lui donne une aire de valeur 1. Commençons ensuite un pliage, bien connu des enfants (b) et poursuivons (c). On obtient ainsi un 2e carré recouvert entièrement par les 4 triangles pliés (soit deux surfaces superposées dont chacune a pour mesure 1/2). En dépliant la feuille, on peut hachurer les 4 triangles constituant la partie pliée, dont l'aire vaut 1/2. Revenant au carré (c), on peut ensuite recommencer le même type de pliage, ce qui donnera(e) après avoir déplié le tout (et mis en pointillé la nouvelle partie repliée, qui correspond à une surface de mesure 1/4). En revenant à chaque fois au nouveau carré obtenu par pliage, on poursuit toujours le même type de

pliage... d'où une succession de carrés emboîtés les uns dans les autres (f). A chaque étape du pliage/dépliage, on demande d'écrire soigneusement la valeur de l'aire totale des sur- faces pliées (et hachurées), soit 1/2; puis 1/2 + 1/4; puis 1/2 + 1/4 + 1/8; puis 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16; etc.

((mettre en les réduisant les figures du bas de la page 41))

Mais les pliages se font de plus en plus difficiles; certains participants décident d'arrêter :

- -" Je ne peux plus ". A quoi le formateur rétorque: " Alors, continuez dans vos têtes "
- -" C'est pas possible ", crie un autre. -" Ça ne s'arrêtera pas " s'exclame quelqu'un. -" Mais si, mais si " dit encore un autre en ouvrant toute grande sa feuille pliée, et en la brandissant: " Au fond, si on pouvait continuer jusqu'à l'infini, ça ferait le carré tout entier, c'est-à-dire 1 ".

Alors est écrite au tableau l'égalité : 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + ..= 1.

-" *Tout est dans les points de suspension* " murmure un participant.

En effet, alors que la somme indique une succession qui n'en finit pas, la pensée, elle, pose un acte mental qui, en quelque sorte, simultanéise le tout, poussant la raison à prendre un autre essor.

Il en est quelque peu du fini et de l'infini, du continu et du discontinu, comme des contradictions mystérieuses en physique entre conception quantique et conception ondulatoire de la lumière. Chaque fois qu'une notion est approfondie, elle renvoie plus crûment à l'autre, dans un mouvement de balancement où seule une pensée dialectique peut commencer à s'y reconnaître! On est pourtant au cœur même des vrais problèmes de création en mathématique. De création, re-création (et non pas de récréation, bien que cela éveille fébrilement une curiosité gourmande) Car c'est bien comme étrangetés, anomalies divertissantes qu'ont été présentés trop souvent les paradoxes de Zénon, éludant ainsi les points épineux où se bousculent et se génèrent mutuellement imaginaire et rigueur, savoir et philosophie.

Ainsi en est-il de la notion d'ensemble qui, au XIXe siècle, a fait éclater de nouveaux paradoxes.

Prenons par exemple l'ensemble des entiers naturels N = [0,1,2,3,4...] et l'ensemble des nombres pairs P = [0,2,4,6,8...]. On peut tout aussi bien saisir avec une grande "rigueur":

-qu'il y a "autant" de nombres dans N que dans P , puisqu'à chaque entier, je peux lui faire correspondre un nombre pair, en le multipliant par 2,

-qu'il y a " moins " de nombres dans P que dans N puisque l'ensemble des nombres pairs ne constitue qu'une partie de l'ensemble des entiers (ceux qui, de 2 en 2, sont terminés par un nombre pair) .

Ensemble aussi de points sur des segments de droites:

De la même façon, on pourrait affirmer que 2 segments AB et A'B' (obtenus par intersection de 2 sécantes avec 2 parallèles) manifestement inégaux, quant à leurs longueurs, sont pourtant constitués du même nombre de points. En effet, toute sécante pivotant autour de O met en relation stricte tout point de AB avec un point correspondant de A'B'.

((mettre figure diminuée du bas de la page 42))

Paradoxes qui font s'écrier Cauchy, celui qui élabora la notion même de limite: " c'est absurde, ditil, puis- que cela revient à dire qu'il y a des nombres égaux dont l'un est plus grand que l'autre ". Il est intéressant de savoir que, près de deux siècles avant, Galilée avait remarqué que " les attributs égal, plus grand et plus petit, ne sont pas applicables aux quantités infinies mais seulement aux finies ",

Or l'étrange, le défi de l'imaginaire lancé à la raison -ou peut-être bien l'inverse... -est que cette propriété- là, ce paradoxe-là, qui a amené Cauchy à refuser la notion d'ensemble infini, est celle-là même qui a été prise comme définition des ensembles infinis !

Et voilà que surgit une nouvelle notion de nombres, ceux qui désignent le nombre d'éléments d'un ensemble infini (ce sont les "nombres transfinis": Aleph 0, Aleph 1, etc.), nombres "monstrueux" dit Poincaré, puisque l'infini cesse d'être assimilable à l'infini... chaque ensemble infini ayant une puissance qui lui est propre. Ainsi, les paradoxes deviennent ferments puissants d'inventions nouvelles parce que, mettant en cause une logique trop formelle, limitée ou frileuse, font de la dialectique le triomphe d'une logique de type nouveau qui ne cherche plus à supprimer les contradictions mais à les assumer pleinement pour en inventer le dépassement. C'est bien pourquoi les paradoxes font sortir de leurs tanières les positions philosophiques, les parti-pris qui soustendent toute recherche, à l'encontre des partisans d'une vérité seulement fondée sur la rigueur et la certitude^{VI}. Citons seulement D. Hilbert (1862-1943) qui en arrive à une véritable profession de foi: " le but de ma théorie est d'établir une fois pour toutes la certitude des méthodes mathématiques. L'état actuel des affaires, où nous pourchassons les paradoxes est intolérable. Pensez seulement que les définitions et les méthodes déductives que chacun apprend, enseigne et emploie en mathématiques, le parangon de la vérité et de la certitude conduit à des absurdités. Si la pensée mathématique est en défaut, où allons-nous trouver la vérité et la certitude ?". Inversement, on trouve la position d'Imre Lakatos faisant dire à Gamma, l'un des personnages en dialogue dans " Preuves et réfutations " : "Je pense que si nous voulons connaître vraiment en profondeur quelque chose, nous devons l'étudier non pas sous sa forme normale, courante, usuelle, mais dans ses états critiques, dans la fièvre, dans la passion ".

L'histoire est pourtant remplie, au delà des polémiques entre savants, de situations truculentes qui témoignent de la force insolite des paradoxes:

Un Sultan, pour récompenser celui de ses sujets qui inventa **le jeu d'échec**, lui proposa en cadeau tout ce qu'il souhaiterait. Ce dernier, réfléchissant un moment, lui dit: " Je désire autant de grains de blé qu'il en faut pour qu'à chaque case de l'échiquier corresponde: 1 grain de blé pour la 1ère case, 2 grains de blé pour la 2ème, 4 grains de blé pour la 3ème, et ainsi de suite, en doublant à chaque fois le nombre précédent jusqu'à la dernière case. Le Sultan, désolé de la modestie d'un tel choix, demanda qu'on remit vite le sac de blé attendu. Cependant, le lendemain, la chose n'étant pas encore faite, le Sultan se mit en colère. " Seigneur, lui répondirent ses serviteurs, les comptes sont loin d'être finis et cela fait déjà de très nombreux sacs de blé ". Le Sultan, incrédule, renvoya ses serviteurs et en reprit d'autres, plus experts en calcul. Mais le temps passa encore et il fut répondu au Sultan: "Vos greniers, Seigneur, ne sont pas suffisants, ni même tous ceux du

Royaume! ". Alors le Sultan, admiratif aussi bien qu'en colère, demanda conseil: "Que puis-je maintenant répondre à cet homme, aussi habile à inventer ce jeu qu'à imaginer une telle récompense ?". Et il lui fut répondu: "Demandez-Iui, Seigneur, qu'il vienne lui-même compter les grains de blé...".

Ou encore, pour chercher à être plus directement concernés, calculons de **combien d'ancêtres** directs nous sommes issus. Pour cela, admettons par exemple des tranches de 25 ans par génération, soit 2 ascendants pour une génération (père et mère), 4 pour deux générations, etc. Et pour se situer, historiquement, dans les " amonts " de notre propre genèse, comptons combien d'ancêtres :

- -au moment de la Révolution Française (il y a environ 200 ans)
- -juste avant Ch. Colomb et la découverte de l'Amérique (il y a environ 500 ans)
- -au moment du règne de St Louis (il y a environ 750 ans).

Le lecteur fera ses comptes... et ne manquera pas de se poser des questions quant à la mise en relation avec le nombre d'habitants réels à telle ou telle époque... ce qui renvoie au problème de nos origines communes et du croisement permanent des peuples et des races... Nous sommes tous frères! Et voilà que la mathématique part en guerre contre le racisme! 2 plus 2 font 4. Mais si on recommence " souvente fois " comme disait l'un de mes aïeux, alors vole en éclats, par la magie arithmétique, jusqu'à la notion même de race.

On pourrait, sur ces pas, poursuivre d'autres investigations où les mathématiques viennent perturber notre vision coutumière du réel - tout en l'élucidant - nous renvoyant, sous peine de stagnation, à de nécessaires révisions (re-visions) d'ordre philosophiques en même temps que méthodologiques. C'est pourquoi histoire et philosophie devraient accompagner - nourrir de l'intérieur - dans les apprentissages, la connaissance en mathématique, comme toute connaissance. "Car l'histoire des mathématiques, sans le guide de la philosophie, est devenue aveugle, tandis que la philosophie des mathématiques, tournant le dos aux phénomènes les plus intrigants de l'histoire de mathématiques, est devenue vide "Imre Lakatos.

Sortir des dilemmes ancestraux du faux et du vrai, de l'intuitif et du rigoureux, parce que dilemmes toujours liés - en la légitimant - à quelque conception sélective des choses. Que l'on parvienne à affirmer 1 = 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + ...illustre bien, d'une certaine façon, les faux dilemmes entre l'identique et le différent, entre l'un et le multiple, où 1, unité d'abord perçue comme pleine et insécable, devient limite d'une série infinie de termes qui vont s'évanouissant... Voilà qui déplace le champ d'une raison inquiète de certitude n'ayant d'autre voie, pour surmonter l'impasse, que de faire de cette impasse la solution elle-même.

Surmonter les paradoxes de Zénon, tout comme l'enfermement des 9 points du carré, c'est avoir l'audace de se donner les clés d'un autre regard, d'une autre posture pour voir les choses et le monde.

L'inouï de la mathématique, c'est de planter ce paradoxe du jeu subtil de l'imaginaire dans les mailles serrées du rigoureux. Encore faut-il que puisse être " entendu " cet inouï, non point comme privilège réservé à quelques-uns, mais comme offert à tous. Casser la prépondérance d'une pratique déductive qui - sous le prétexte de s'appuyer sur l'intelligence (d'un petit nombre, bien sûr) - empêche que soit mise en chantier toute invention créatrice, qu'elle soit celle des processus historiques aussi bien - et c'est combien plus grave -que celle de tous ceux qui apprennent et se

forment.

Les hommes, les petits d'hommes, ont des pouvoirs extraordinaires dont on empêche qu'ils se révèlent à eux. La capacité d'invention - et donc aussi, bien sûr, la capacité déductive elle-même - sont données à tout le monde si les conditions sont créées pour qu'elles puissent s'exprimer et grandir.

"Le génie est commun et les circonstances propres à le développer très rares. Aussi tout l'art de l'éducation consiste à placer les jeunes gens dans un concours de circonstances propres à développer en eux le germe de l'esprit et de la vertu ". HELVÉTIUS

Insuffler soif et faim sur le champ du savoir, c'est faire que chacun se découvre des pouvoirs d'inventer, dans des pratiques au quotidien qui annoncent -et réalisent déjà -ce projet insensé de l'Education Nouvelle de **démocratiser le génie**.

i "Il n'est de science que polémique" écrit Bachelard.

ii (cf p.131-136 in "Se construire...").

iii Cf: article "On admet que..." (O.B) sur Imaginaire et mathématiques in Cahiers de poème: "Poémathique"

iv Les "Savoirs ventriloques de P. Thuillier

v H.Lefebvre: "Le retour de la dialectique",p.68 (Messidor, 1986)

vi cf p.42 de l'article Dialogue n°60 et 1^{er} chapitre de "Se construire dans le savoir".